

Zmarties- Präsentation

Von Kuno 9d und Fabian 9c

Mathematik in der Musik

Inhaltsverzeichnis

- Harmonielehre:
 - Intervalle
 - Akkorde
 - Kadenz
 - Gesetze der klassischen Musik
- Mathematische Zusammenhänge:
 - Rhythmus
 - Frequenzen
 - Zahlenverhältnisse
 - Monochord
- Quellen

Harmonielehre

Intervalle

Als Intervalle werden verschiedene Sprünge zwischen zwei Tönen bezeichnet.

Einklang	Zweiton- intervall	Dreiton- intervall	Vierton- intervall	Fünftön- intervall	Sechstön- intervall	Siebentön- intervall	Achtton- intervall
							
Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave

Akkorde

In einer Tonleiter kann man auf jedem Ton, der zu der entsprechenden Tonleiter gehört, einen Dreiklang, also einen Akkord bauen. Bei der C-Dur Tonleiter sehen die zugehörigen Akkorde so aus:

The image shows a musical score for the first eight chords of the C major scale. The notation is in 4/4 time, with a treble clef on the top staff and a bass clef on the bottom staff. The chords are represented by block chords in the treble clef and single notes in the bass clef. The chords are: C major (C4, E4, G4), D minor (D4, F4, A3), E minor (E4, G4, B3), F major (F4, A4, C5), G major (G4, B4, D5), A minor (A4, C5, E5), B diminished (B4, D5, F5), and C major (C5, E5, G5). Below the notation, the chords are labeled: CDur, dmoll, emoll, FDur, GDur, amoll, hvern., and CDur.

Es gibt Dur- und Moll-Akkorde. Man erkennt anhand der Größe der beiden Terzen in einem Akkord, ob es sich um einen Dur- oder Moll-Akkord handelt. Ist die erste Terz eine große Terz und die zweite Terz eine kleine Terz, handelt es sich um einen Durakkord. Wenn die erste Terz eine kleine Terz und die zweite Terz eine große Terz ist, handelt es sich um einen Moll- Akkord.

Kadenz

Eine Kadenz ist eine Akkordfolge, die als Abschluss oder Gliederung dient. Sie besteht aus der Tonika, der Subdominante und der Dominante. Die Subdominante ist immer die vierte Stufe der komponierten Tonart und die Dominante ist immer die fünfte Stufe. Die Tonika selbst ist die erste Stufe. In einem Stück, das in C-Dur komponiert wurde, ist dann die Tonika der C-Dur Akkord, die Subdominante der F-Dur Akkord und die Dominante der G-Dur Akkord.

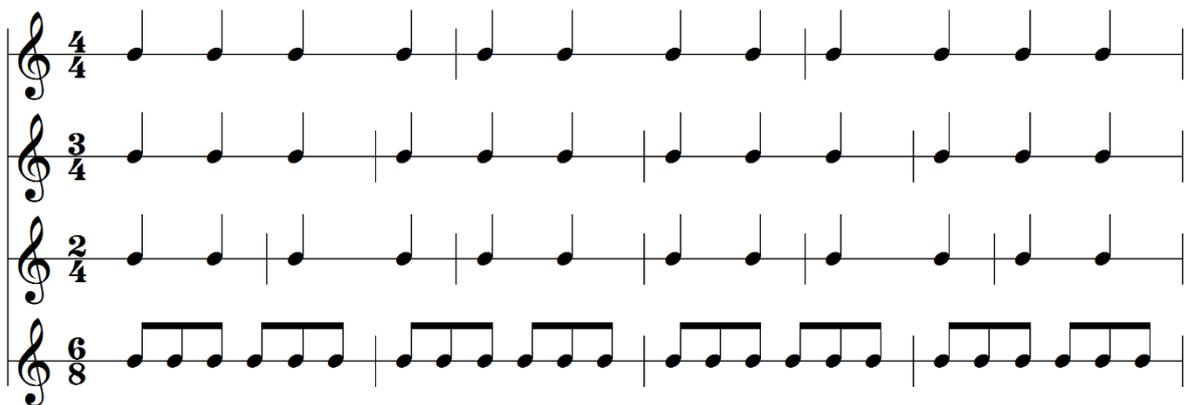
Mathematische Zusammenhänge

Die Mathematik ist in verschiedenen Bereichen in der Musik zu finden. Das sieht man offensichtlich zum Beispiel im Rhythmus und etwas versteckter in zum Beispiel Zahlenverhältnissen und Frequenzen. Die letzteren Bereiche fallen jedoch auch in die Physik.

Rhythmus

Der Rhythmus ist die Struktur der Musik. Vor allem mathematisch sind hierbei die Taktarten, welche in Brüchen angegeben werden.

- Der Zähler steht für die Anzahl der Schläge im Takt
- Der Nenner steht für die Länge der Note im Verhältnis zu den anderen Noten.



Frequenzen

Zwar haben Frequenzen eher einen Physikalischen Zusammenhang, sind aber trotzdem mathematisch.

Die Frequenz ist eine physikalische Größe, welche die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde angibt. Ihre Einheit ist Hertz (Hz).

$$\text{Es gilt: } 1 \text{ Hz} = \frac{1 \text{ Schwingung}}{\text{Sekunde}}$$

Ein Ton entsteht, wenn eine Schwingung konstant ist. Die verschiedenen Tonhöhen kann man auch mit Frequenzen definieren.

Ton	Hertz	Ton	Hertz	Ton	Hertz	Ton	Hertz	Ton	Hertz
'A	27,50	C	65,41	c'	261,63	c'''	1.046,50	c''''	4.186,01
'B	29,14	Des	69,30	des'	277,18	des'''	1.108,73		
'H	30,87	D	73,42	d'	293,66	d'''	1.174,66		
'C	32,70	Es	77,78	es'	311,13	es'''	1.244,51		
'Des	34,65	E	82,41	e'	329,63	e'''	1.318,51		
'D	36,71	F	87,31	f'	349,23	f'''	1.396,91		
'Es	38,89	Ges	92,50	ges'	369,99	ges'''	1.479,98		
'E	41,20	G	98,00	g'	392,00	g'''	1.567,98		
'F	43,65	As	103,83	as'	415,30	as'''	1.661,22		
'Ges	46,25	A	110,00	a'	440,00	a'''	1.760,00		
'G	49,00	B	116,54	b'	466,16	b'''	1.864,66		
'As	51,91	H	123,47	h'	493,88	h'''	1.975,53		
'A	55,00	c	130,81	c''	523,25	c''''	2.093,00		
'B	58,27	des	138,59	des''	554,37	des''''	2.217,46		
'H	61,74	d	146,83	d''	587,33	d''''	2.349,32		
		es	155,56	es''	622,25	es''''	2.489,02		
		e	164,81	e''	659,26	e''''	2.637,02		
		f	174,61	f''	698,46	f''''	2.793,83		
		ges	185,00	ges''	739,99	ges''''	2.959,96		
		g	196,00	g''	783,99	g''''	3.135,96		
		as	207,65	as''	830,61	as''''	3.322,44		
		a	220,00	a''	880,00	a''''	3.520,00		
		b	233,08	b''	932,33	b''''	3.729,31		
		h	246,94	h''	987,77	h''''	3.951,07		

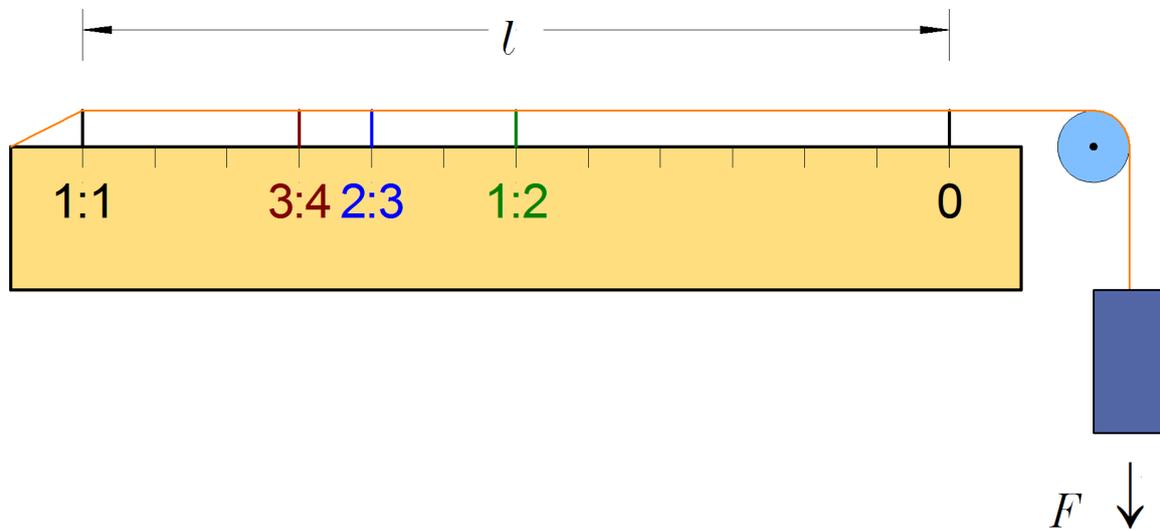
Zahlenverhältnisse

Zahlenverhältnisse in der Musik beschreiben das Verhältnis zweier Töne eines Intervalls zueinander. So stehen zwei Töne einer Oktave im Verhältnis 1:2, einer Quinte 3:2 und einer Quarte 4:3. Dies liegt an der Anzahl der Schwingungen: Je kürzer eine Saite, desto höher der Ton im Verhältnis zum Grundton.

Intervall	Anzahl der Halbtöne	Zahlenverhältnis	Herleitung	
Prime	0	$\frac{1}{1}$		$(\sqrt[12]{2})^0$
Kl. Sekunde	1			$(\sqrt[12]{2})^1$
Gr. Sekunde	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$	$(\sqrt[12]{2})^2$
Kl. Terz	3	$\frac{6}{5}$		$(\sqrt[12]{2})^3$
Gr. Terz	4	$\frac{5}{4}$		$(\sqrt[12]{2})^4$
Quarte	5	$\frac{3}{4}$		$(\sqrt[12]{2})^5$
Gr. Quarte	6	$\frac{45}{32}$		$(\sqrt[12]{2})^6$
Quinte	7	$\frac{3}{2}$		$(\sqrt[12]{2})^7$
Sechste	9			$(\sqrt[12]{2})^9$
Septime	11			$(\sqrt[12]{2})^{11}$
Oktave	12			$(\sqrt[12]{2})^{12}$
Kl. None	13			$(\sqrt[12]{2})^n$

Experiment (Monochord)

Aufbau eines Monochords:



Ein Monochord besteht aus einem Resonanzkasten, über welchem Saiten gespannt sind. Diese können anhand von beweglichen Stegen geteilt werden.

Es eignet sich zur Darstellung der Zahlenverhältnisse. Bei Nutzung mehrerer Saiten können außerdem Intervalle und dessen Verhältnisse gezeigt werden.

Quellen

- <https://de.wikipedia.org/wiki/Monochord>
- <http://summa.stiftungrechnen.de/mathe-klings-gut-zwischen-mathematik-und-musik-besteht-eine-enge-verwandtschaft/>
- <https://www.spiegel.de/spiegel/print/d-27970590.html>
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Frequenz>
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Ton%C3%B6he>
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Akustik>
- <https://www.herder.de/kiga-heute/fachmagazin/archiv/2017-47-jg/9-2017/mathe-musizieren-vier-leicht-umsetzbare-experimente/>
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Zw%C3%B6lftontechnik>
- <https://www.musiker-board.de/threads/nach-welchen-regeln-funktioniert-12-ton-musik.71828/>
- <http://ul.qucosa.de/api/qucosa%3A14610/attachment/ATT-0/>
- https://de.wikipedia.org/wiki/Reine_Stimmung
- <https://www.musik-verstehen-lernen.de/index.php/der-takt>